Om de forkunnskaper som trengs for å lese mine arbeider

Morten Harboe Rognes

(2009)

© Morten Harboe Rognes 2009

Om forkunnskaper

Enhver som ønsker å lese mine skrifter, eller deler av av dem, bør ha visse forkunnskaper i predikatlogikk, mengdelære og modallogikk. Dette er nødvendig, men neppe tilstrekkelig. I tillegg bør man sette seg inn i den notasjon jeg benytter i mine arbeider. Jeg har redegjort for den i skriftet "Notasjon". Ytterligere bør man lese igjennom arbeidet "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære"[1]

La oss se mer systematisk på skrifter som kan gi en det nødvendige grunnlag.

Når det gjelder predikatlogikk gir Quines "Methods of Logic" en meget god innføring.[2] Denne gir en allsidig og grundig fremstilling av alle av alle sider ved den klassiske predikatlogikk. Den gir en detaljert innføring i setningslogikk, metoder for å avgjøre om en setningslogisk formel er gyldig, videre en detaljert redegjørelse for predikatlogikken utvidet med identitet. Quines behandling av læren om bestemte beskrivelser slik den foreligger her og også i andre av hans skrifter er meget opplysende. I Quines bok gjøres det også rede for et system for naturlig deduksjon som kan brukes for å gi bevis for alle gyldige predikatlogiske formler. Boken gir også en ganske grundig innsikt i de semantiske sidene ved predikatlogikken. Det ville være en fordel om man satte seg skikkelig inn i Quines system for naturlig deduksjon slik at man oppnår fullfortrolighet med det.

Quines bok gir også en utførlig innføring i hvordan man parafraserer vanlige setninger inn i den predikatlogiske symbolisme. Denne siden ved Quines bok gjør den spesielt anbefalelsesverdig. Det er få andre lærebøker i elementær logikk som gir leseren en så god forståelse av dette emnet som er helt essensielt for å kunne anvende logikken.

I Quines bok finnes det også et bevis for at predikatlogikken er fullstendig.

Når det gjelder innføringsbøker i logikk finnes det selvfølgelig andre bøker enn denne boken til Quine. En god bok, som ikke forutsetter at leseren på forhånd har spesielt omfattende kunnskaper, og som skulle være fullt forståelig etter at man har lest Quines bok gitt at man har helt alminnelige bakgrunnskunnskaper i matematikk er Stolls "Set Theory and Logic".[3] Denne dekker stort sett de emnene som Quine tar opp, men tar også opp en lang rekke andre temaer som gir en dypere forståelse av predikatlogikken. Stoll gir et aksiomatisk system for predikatlogikken av en annen art enn det naturlige deduksjonssystem man finner hos Quine. I tillegg tar Stoll opp en lang rekke andre emner som ikke dekkes i Quines bok. Den inneholder innføringskapitler om den allminnelige intuitive mengdelære og gir leseren en introduksjon til læren om ordinaltall og kardinaltall. Videre inneholder den et innføringskapittel om Boolske algebraer. Ytterligere har boken kapitler om systemet av naturlige tall, om dette systems utvidelse til de reelle tall, om uformell aksiomatisk matematikk, om uformel aksiomatisk mengdelære. Endelig inneholder boken et kapittel om forskjellige algebraiske teorier og et kapittel om første-ordens teorier.

De to bøkene som nå er nevnt skulle, hvis man leser dem grundig og arbeider skikkelig med alle de oppgavene som stilles, gi en et relativt solid grunnlag for ytterligere lesning av noe mer avansert litteratur i matematisk logikk.

En meget solid bok som gir en innføring i nesten alle de grunnleggende resultater

1 Se Rognes [1]
2 Se Quine [1]
3 Se Stoll [1]

© Morten Harboe Rognes 2009

i moderne matematisk logikk, men som er meget konsentrert skrevet og derfor svært tung og lese, er Shoenfields bok "Mathematical logic".[4] De første kapitlene i boken introduserer et predikatlogisk system for bevis av gyldige formler og en inneholder en introduksjon av modellbegrepet for første-ordens logikk. I disse kapitler gis bevis for en rekke klassiske resultater, det dreier seg om fullstendighetsteoremet for førsteordens logikk, Herbrandsteorem og Skolems teorem. Dernest følger et introduksjonskapittel om modellteori som ta opp emner som kompakthetsteoremet, isomorfi og substrukturer, fullstendige teorier og kategorisitet. I kapitlet gis det semantiske bevis for Craigs interpolasjonsteorem og Beths definerbarhetsteorem samt en rekke andre dyptgående og velkjente satser i modellteorien. Etter dette kapitlet følger et som introduserer de grunnleggende egenskaper til rekursive funksjoner og hvor forfatteren presenterer fullstendige bevis for Church teorem og Gødels ufullstendighetsteorem for Peano-aritmetikk. Dette kapitlet etterfølges av et som gir en dypere innføring i rekursjonsteorien. I ytterligere et kapittel gis Gødels bevis for aritmetikkens konsistens og en rekke andre resultater som det er nærliggende å ta opp i den forbindelse. Kapitlet inneholder dessuten et avsnitt om annenordens aritmetikk. Det siste kapitlet i boken er et svært konsentrert skrevet kapittel om mengdelære. Det gis en fremstilling av Zermelo-Fraenkel mengdelære (ZF) og i kapitlet detaljerte bevis for Gødels teorem for at ZF utvidet med utvalgsaksiomet og kontinuum-hypotesen er konsistent relativt til ZF. I dette kapitlet gis også bevis for Cohens resultat om at dersom ZF er konsistent så er hverken utvalgsaksiomet eller kontinuum-hypotesen noe teorem i ZF. Kapitlet inneholder også et avsnitt om store kardinaltall.

Boken kan anbefales, men det er egentlig bare de fem første kapitlene som det strengt tatt er nødvendig å lese som bakgrunn for det jeg har skrevet.

Som nevnt er det nødvendig at leseren er fullt ut fortrolig med de grunnleggende delene av mengdelæren. Hvis man har lest Quines "Methods of Logic" kan man med fordel fortsette med hans bok "Set Theory and its Logic" som gir en utmerket introduksjon til sentrale deler av mengdelæren.[5] Boken er klart skrevet og det skulle være mulig å få tak i alle detaljer om man har lest det som er nevnt ovenfor. Quine fremsetter ikke i sin bok noe sterkt mengdeteoretisk system, han arbeider bare med noen svake mengdeteoretiske aksiomer som i det vesentlige postulerer eksistensen av endelige mengder. Imidlertid viser han utover i boken hva slags eksistensantagelser vedrørende mengder som må forutsettes for å bevise de klassiske resultatene i aritmetikk, læren om de reelle tall og teorien om ordinaltall og kardinaltall. Dessuten inneholder bokens annen del en detaljert og meget innsiktsfull sammenligning av svært mange av de mengdeteoretiske systemene som har blitt foreslått. Denne delen av boken kan det være vel verdt å sette seg inn i. Når det gjelder lesningen av det jeg selv har skrevet tror jeg det absolutt ville være en fordel om man var fullt ut fortrolig med innholdet i denne boken.

En annen bok som også gir de fornødne kunnskaper i mengdelære er Takeuti og Zarings bok "Introduction to Axiomatic Set Theory".[6] Oppfølgeren til denne boken "Axiomatic Set Theory", kan naturligvis også leses, men inneholder for det meste stoff som ikke er direkte relevant for noe jeg har drevet på med. I Takeuti og Zarings "Introduction to Axiomatic Set Theory" gis en stringent fremstilling av Zermelo- Fraenkel mengdelære utvidet med utvalgsaksiomet, med andre ord systemet ZFC. Det er i hovedsak det mengdeteoretiske

4 Se Shoenfield [1]
5 Se Quine [2]
6 Se Takeuti & Zaring [1]

© Morten Harboe Rognes 2009

system jeg baserer meg på i mine egne skrifter. Fremstillingen i Takeutis bok er meget detaljert og dekker langt mer enn det Quine dekker. Man starter fra bunnen og i de første delene av boken fremstilles ZFC uten at man på forhånd behøver så store forkunnskaper. Temaer som har med Boolsk algebra, funkjoner, relasjoner, velordninger og transfinit induksjon fremstilles klart og detaljert. Den klassiske Cantorianske teori om ordinaltall og kardinaltall fremstilles med relativt stor utførlighet. Den siste halvdelen av boken beskjeftiger seg med modeller for mengdelæren og høydepunktet er et bevis for Gødels teorem om konsistensen av ZF utvidet med utvalgsaksiomet og kontinuumhypotesen relativt til ZF. Det andre bindet til Takeuti og Zaring, "Aksiomatic Set Theory" tar for seg tre grunnleggende teknikker for å konstruere modeller for Zermelo-Fraenkel mengdelære.[7] Det dreier seg om relativ konstruktibilitet, Cohens forcing-teknikk og Scott-Solovays metode med "Boolean valued" modeller. Det gis bevis for Cohens uavhengighetsresultater samt en rekke andre satser. Som nevnt er dette siste bindet av Takeuti og Zaring i og for seg ikke noe man trenger å lese som bakgrunnstoff for noe av det jeg har skrevet.

Vi har nå sett på hvilke bøker man kan og bør lese for å få de tilstrekkelig bakgrunnskunnskaper i predikatlogikk og mengdelære. La oss nå se på endel skrifter som etter min mening gir en de nødvendige kunnskaper i modallogikk.

Det er i og for seg ikke skrevet mange egentlige lærebøker i modallogikk. En av de beste, selvom den er urgammel, som ikke bare gir en innføring i setningsmodallogikk, men også i predikatlogiske modalsystemer er Hughes og Cresswells "Introduction to Modal Logic".[8] Denne boken gir i de første kapitlene en detaljert og klart skrevet innføring i såvel de syntaktiske som de semantiske sider ved de velkjente setningslogiske modalsystemene T, S4 og S5. I denne delen vises det også detaljert hvordan man på basis av Kripkemodeller for systemene kan vise at systemene er avgjørbare. I den andre delen av boken gis det også Henkin-bevis for fullstendigheten av disse systemene. Perspektivet utvides også til versjoner av disse tre systemene med kvantorer. Også for disse predikatlogiske systemene gis det fullstendighetsbevis ved hjelp av Henkins metode. I en siste delen av boken går Hughes og Cresswell gjennom detaljert gjennnom de velkjente Lewis-systemene S1 - S9 samt en lang rekke andre, beslektede systemer, og viser hvordan de er relatert til hverandre. I tillegg til dette finnes det også et kapittel om algebraisk semantikk for setningslogiske modalsystemer og et kapittel hvor forfatterne kommenterer en rekke mer uortodokse systemer som er beslektet med modallogikk. Hughes og Cresswells bok er klart skrevet og relativt lett å komme seg igjennom. Etter min mening er boken den første man bør lese igjennom før man går videre til annen litteratur om modallogikk. Dette gjelder om man ikke har noen kunnskaper i modallogikk på forhånd.

Når det gjelder den videre lesning i modallogikk er det etter min mening nødvendig å lese visse sentrale arbeider av Kripke, Hintikka, Lemmon, Scott, Montague og Quine. Når det gjelder Kripke er det i høyeste grad ønskverdig at man leser de tidlige skriftene hans i modallogikk. Det dreier seg primært om "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi" og "Semantical analysis of modal logic I, non-normal propositional calculi". Dessuten bør man lese "Semantical conciderations on modal logic".[9]

Vedrørende Hintikka vil det være en fordel om man setter seg skikkelig inn i hans

7 Se Takeuti & Zaring [2]
8 Se Hughes & Cresswell [1]
9 Se Kripke [1], [2] og [3]

© Morten Harboe Rognes 2009

arbeider "Modality and quantification" og "The modes of modality" [10]

Scott og Montague har betydd mye når det gjelder den semantiske utviklingen av modallogikken. Når det gjelder Scott bør man lese hans artikkel "Advice on modal logic".[11] Dessuten bør man streve seg igjennom Chellas "The logical form of imperatives" som gir en rimelig bra illustrasjon til hvordan Scotts semantiske ideer kan anvendes.[12] Alle disse skriftene skulle det være mulig å lese uten særlig besvær om man har satt seg skikkelig inn i den litteratur vi tidligere har nevnt. Av Montagues skrifter har jeg for min egen del hatt utbytte av hans Pragmatics and intensional logic".

For å få en dypere innsikt i semantikken til de mer tradisjonelle modalsystemene kan man lese Lemmons to arbeider "Algebraic semantics for modal logic I" og "Algebraic semantics for modal logic II".[13] Videre bør man lese Lemmon og Scott: "The 'Lemmon notes': an introduction to modal logic".[14] En lærebok som gir en god sammenfatning av resultatene i sistnevnte arbeid er Chellas bok "Modal logic".[15] Den beskjeftiger seg riktignok bare med setningslogiske systemer, men gir en fremstilling av dem som gir en et dyptgående innblikk i deres systematikk og kombinatorikk. Boken gir en også et meget godt innblikk i hvordan man ved forskjellige teknikker beviser fullstendighet og avgjørbarhet for denne slags modalkalkyler.

Når det gjelder de viktigste problemene som har med identitet og kvatifikasjon inn i modale kontekster å gjøre vil jeg anbefale at man leser Føllesdals "Referensial opacity and modal logic" som tar opp og drøfter en rekke av de vesentligste innvendinger som Quine har rettet mot modale predikatlogikker.[16] Forøvrig bør det i denne forbindelse nevnes at dersom leseren setter seg grundig inn i de av Quines skrifter som berører modallogikken vil dette bare være en fordel.[17] Hva man nå måtte mene om Quines filosofi er det han har å tilby av argumenter på dette området svært viktig.

Jeg har ovenfor bare ment å angi endel litteratur som vil være tilstrekkelig som grunnlag for å forstå de rent tekniske sider ved det jeg har skrevet. Det har selvfølgelig ikke vært meningen å angi noe i likhet med en oppdatert bibliografi over sentrale emner i matematisk logikk og modallogikk. Det ville være en altfor omfattende oppgave. Dessuten ville det være totalt uegnet for en person uten spesielle kunnskaper som spør "Hva må jeg egentlig lese for å forstå noe av det denne forfatteren skriver?". Hvis en person stiller dette spørsmålet er det snarere en fare for at jeg har angitt for mye, enn for lite. I så fall ligner jeg for mye på den typen upedagogiske professorer som man noen ganger kan iakta ved våre universiteter, personer som i sin narraktighet og forfengelighet anbefaler en stakkars student å lese et vognlass med bøker når saken bare gjelder en filledetalj i Kants kategorilære som kan besvares på fem minutter.

---

10 Se Hintikka [1], [2]
11 Se Scott [1]
12 Se Chellas [2]
13 Se Lemmon [1], [2]
14 Se Lemmon & Scott [1]
15 Se Chellas [1]
16 Se Føllesdal [1]
17 Se Quine [3], [4], [5] og [6]

© Morten Harboe Rognes 2009

Bibliografi

Chellas [1] Chellas, B.F.,1980, *Modal Logic*, London New York New Rochelle Melbourne Sydney, Cambridge University Press

Chellas [2] Chellas, B.F.,1969, *The Logical Form of Imperatives*, Standford California, Perry Lane Press

Føllesdal [1] Føllesdal, D., 1966, "Referential opacity and modal logic", I *Filosofiske problemer nr. XXX II* (ed.) Arne Næss, Universitetsforlaget

Hintikka [1] Hintikka, K.J.J., 1961, "Modality and quantification", *Theoria,* Vol 27, pp. 110-128

Hintikka [2] Hintikka, K.J.J., 1963, "The modes of modality", *Acta Philosophica Fennica, Modal and Many-valued Logics*, pp. 65- 81

Hughes & Cresswell [1] Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen and Co Ltd

Kripke [1] Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96

Kripke [2] Kripke, S.A., 1965, "Semantical analysis of modal logic II, non-normal modal propositional calculi", *The Theory of Models* (ed. J.W. Addison, L. Henkin, A. Tarski), Amsterdam, North Holland Publishing Co., pp. 206 -220

Kripke [3] Kripke, S.A., 1963, "Semantical considerations on modal logic", *Acta Philosophica Fennica 16*, pp. 83 - 94

Lemmon [1] Lemmon, E. J., 1966, "Algebraic semantics for modal logics I", *The Journal of Symbolic Logic,* Vol 31,pp. 46 - 65

Lemmon [2] Lemmon, E. J., 1966, "Algebraic semantics for modal logics II", *The Journal of Symbolic Logic,* Vol 31,pp. 191 - 218

Lemmon & Scott [1] Lemmon, E.J., Scott, D., *The 'Lemmon Notes': an introduction to modal logic* (ed. Krister Segerberg), *American philosophical quarterly* Monograph Series (ed. Nicholas Rescher), no. 11, Oxford, Basil Blackwell.

Montague [1] Montague, R. , 1970, "Pragmatics and intensional logic", *Synthese 22*, pp. 68 - 94.

Quine [1] Quine, W.V., 1962, *Methods of Logic*, London, Routledge & Kegan Paul

Quine [2] Quine, W.V., 1963, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, The Belknap Press of Harvard University Press

© Morten Harboe Rognes 2009

Quine [3]	Quine, W.V., 1961, *From a Logical Point of View*, New York, Harper Torchbooks, Harper & Row
Quine [4]	Quine, W. V., 1960, *Word and Object*, Cambridge Massachusetts, The M.I.T. Press
Quine [5]	Quine, W. V., 1953, "Three grades of modal involvement", *Proceedings of XIth International Congress of Philosophy (Brussels)*, vol. 14, pp. 65-81
Quine [6]	Quine, W. V., 1956, "Quantifiers and propositional attitudes", *Journal of Philosophy 53*, pp. 177-187
Rognes [1]	Rognes, M., 1985, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Upublisert manuskript
Scott [1]	Scott, D., 1970, *Advice on Modal Logic* In: Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments, K. Lambert (ed.), pp. 143–173, Dordrecht Reidel
Shoenfield [1]	Shoenfield, J.R., 1967, *Mathematical Logic*, London Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company
Stoll [1]	Stoll, R. R., 1963, *Set Theory and Logic*, San Francisco London, W.H. Freeman and Company
Takeuti & Zaring [1]	Takeuti, G. og Zaring, W.M., 1971, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag
Takeuti & Zaring [2]	Takeuti, G. og Zaring, W.M., 1973, *Axiomatic Set Theory*, New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag

© Morten Harboe Rognes 2009